**APROKSYMACJA PROFILU WYSOKOŚCIOWEGO METODAMI APROKSYMACJI INTERPOLACYJNYMI**

Mikołaj Bisewski 188594

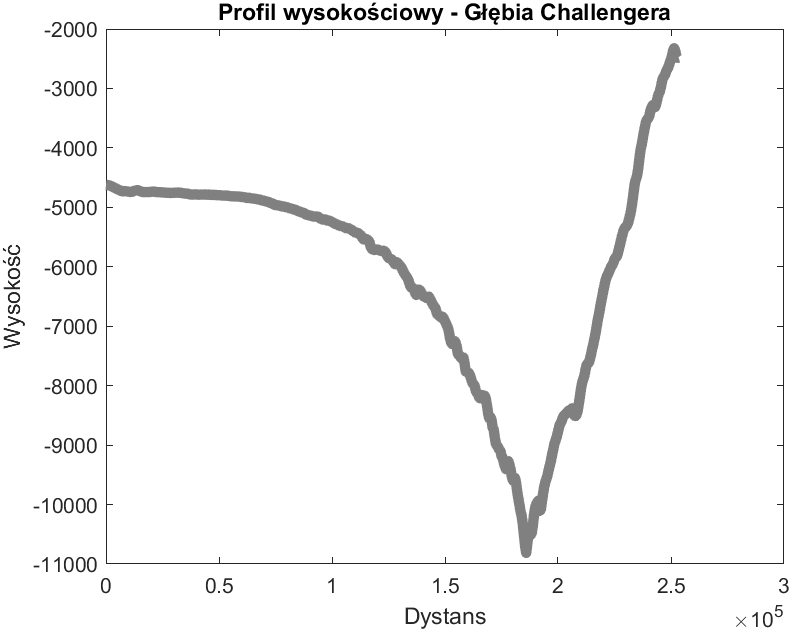
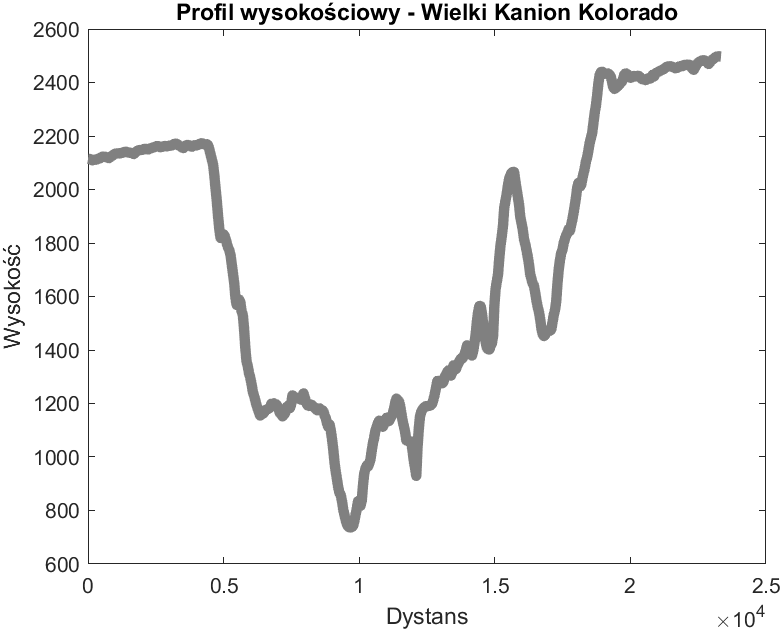
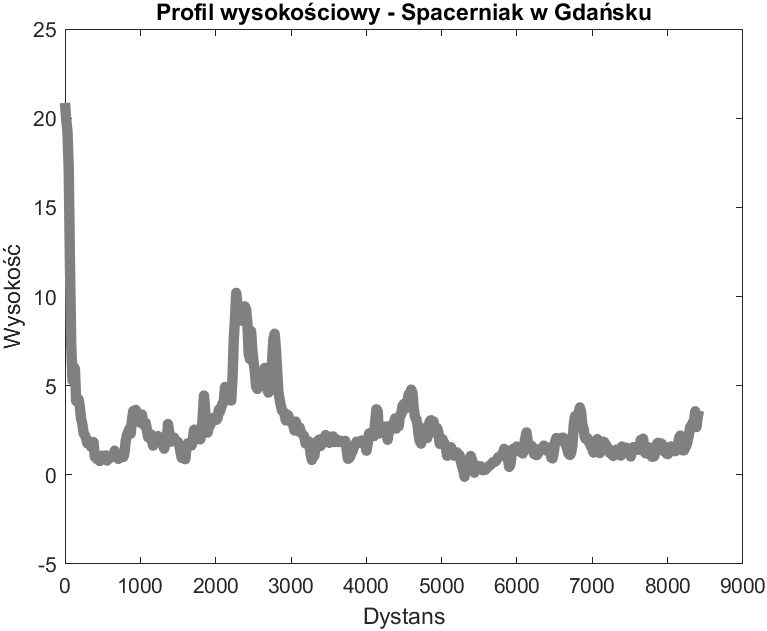
# **Wstęp**

Celem Projektu jest zaimplementowanie metody Interpolacji wielomianem Lagrange oraz Interpolacji funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia. W niniejszym sprawozdaniu dokonuję interpolacji dla danych dotyczących profilu geograficznego w celu zbadania dokładności tych metod. Do określenia dokładności interpolacji używam błędu średniokwadratowego pomiędzy wartością zmierzoną a interpolowaną (błąd jest podany w metrach). Metody są badane pod względem:

* Ilości węzłów interpolacyjnych.
* Sposobie ich rozmieszczenia.
* Charakterystyki interpolowanych danych.

# **Wybór Danych**

Do badania metod używam danych dostarczonych na platformie Enauczanie:



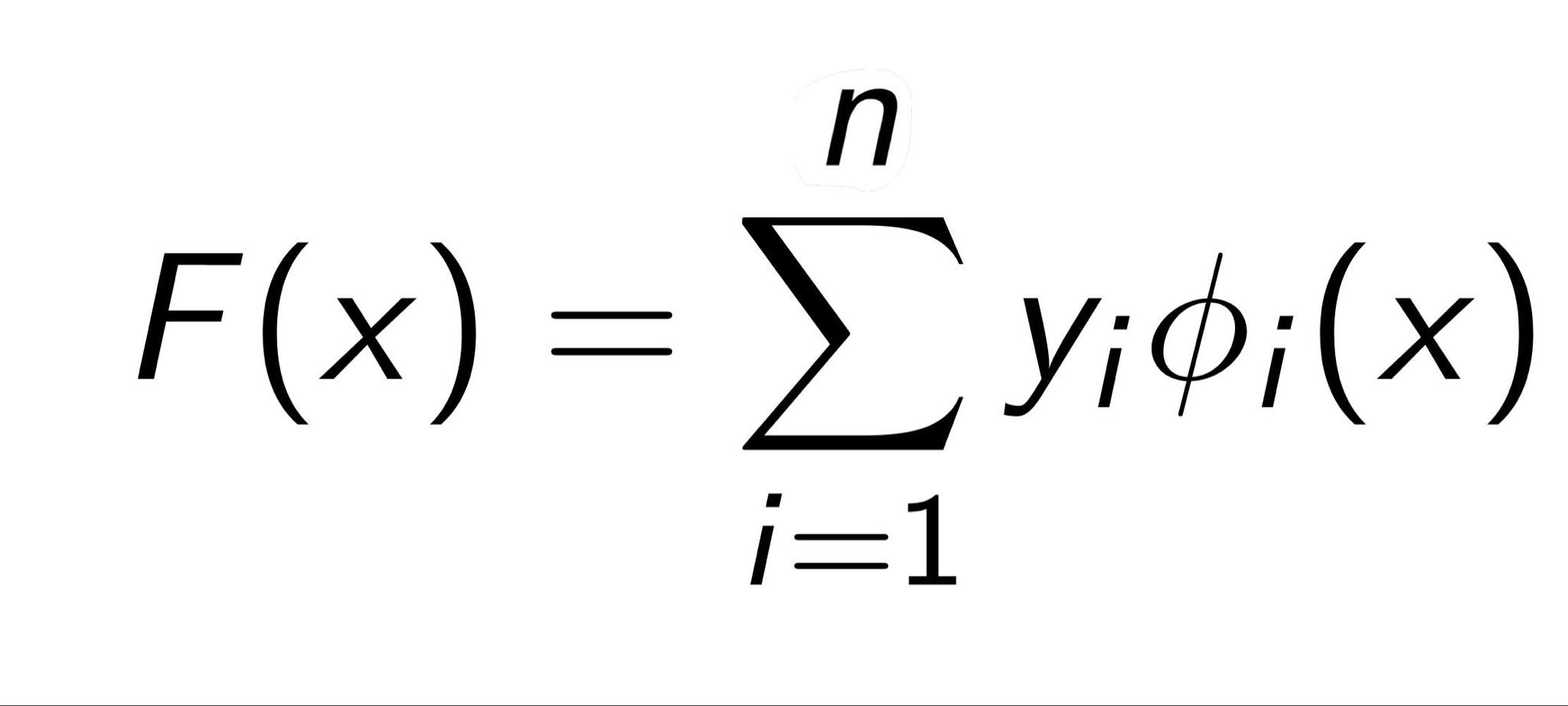
Teren o różnorodnej charakterystyce z stromymi uskokami.

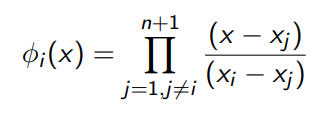
Najniżej położone miejsce na ziemi, o gładkim i stromym spadzie.

Teren nizinny, płaski z niewielkimi uskokami, które mogą utrudnić interpolację.

# Interpolacja wielomianem Lagrange

Interpolacja wielomianem Lagrange polega na policzeniu sumy iloczynów wielomianów z podstawionym punktem którego interpolujemy i ich odpowiednich wartości węzłów interpolacyjnych. Gdzie:



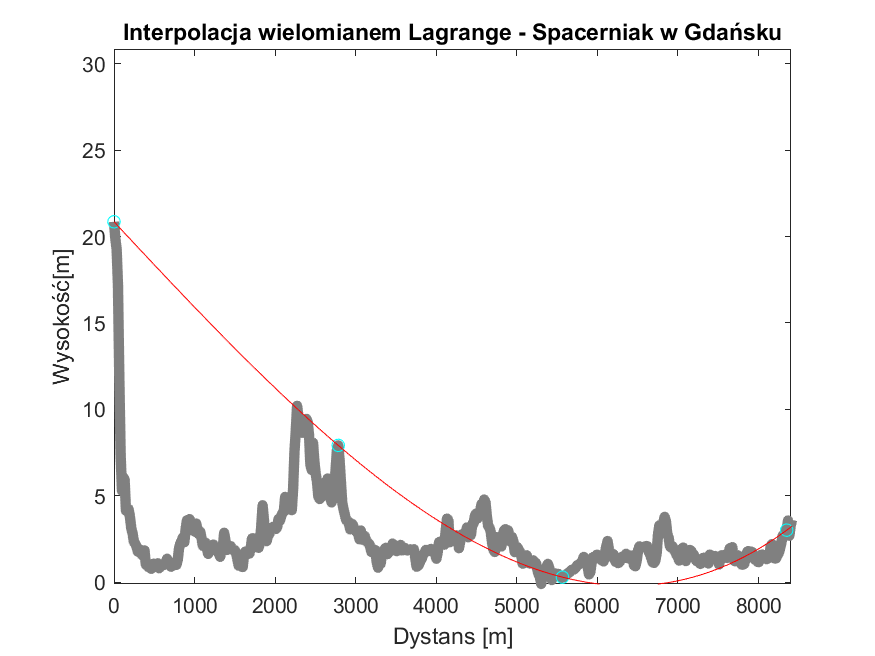
* n - liczba węzłów interpolacyjnych.
* Φi - i-ty wielomian
* yi - i-ta wartość węzła interpolacyjnego
* x - punkt interpolowany

Cechą charakterystyczną tej metody jest jej prosta implementacja oraz jej krytyczną podatność na efekt Rungego czyli oscylacji na krańcach przedziału (co jest przedstawione na poniższych wykresach). Efekt Rungego pojawia się kiedy wykorzystujemy wielomiany wysokiego stopnia do interpolacji węzłów w równo-odległych punktach.

## Spacerniak w Gdańsku

### Równomierne rozmieszczenie punktów dla czterech węzłów

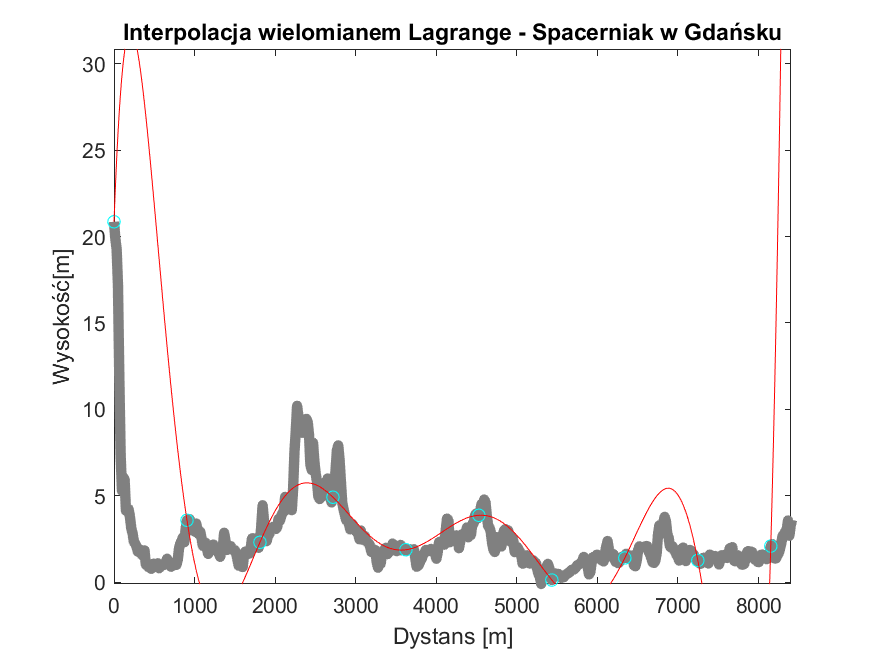




Możemy zauważyć że dla małej ilości równo rozmieszczonych węzłów interpolacja nie przynosi zadowalających wyników, widzimy że krzywa nie oddaje charakteru terenu. Ten fakt może wynikać z powodu że dostarczono niewiele informacji do metody, przez co nie zostały uwzględnione charakterystyczne cechy terenu.

### Równomierne rozmieszczenie punktów dla dziesięciu węzłów

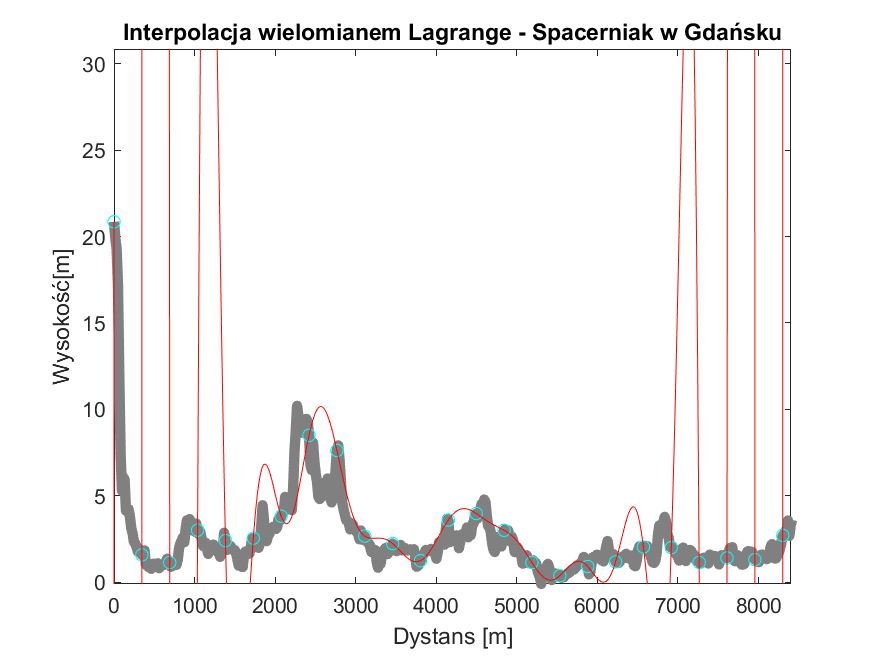




Przy zwiększeniu ilości węzłów możemy zaobserwować poprawę interpolacji w środku przedziału, natomiast na krańcach przedziału pojawia się już efekt Rungego który pogarsza dokładność interpolacji.

### Równomierne rozmieszczenie punktów dla dwudziestu pięciu węzłów

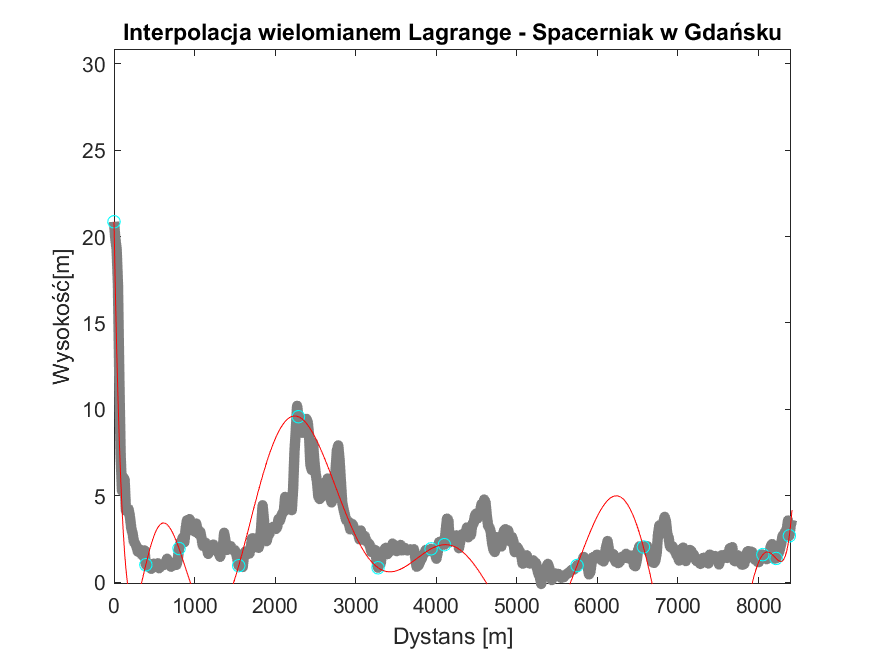




Przy znacznie większej ilości węzłów wciąż możemy zauważyć że dokładność interpolacji  
na środku przedziału się zwiększyła, aczkolwiek efekt Rungego znacząco ją obniża na krańcach przedziału. Rozmiar tych rozbieżności, oscylacji możemy zaobserwować z zwiększonego błędu średniokwadratowego który już jest rzędu jednego kilometra (gdzie maksymalną wysokością badaną jest 20 m n.p.m).

### Nierównomierne rozmieszczenie punktów dla trzynastu węzłów



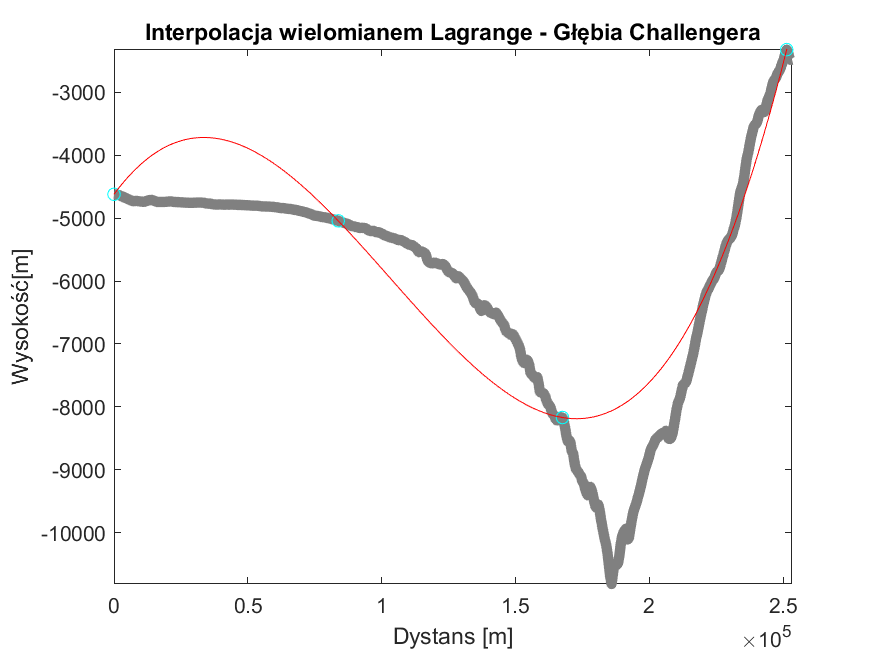


Kiedy interpolujemy funkcję wielomianem Lagrange przy nierównomiernym ułożeniu punktów interpolacyjnych możemy zauważyć że nie zachodzi efekt Rungego (jest znacząco mniejszy), ponadto dokładność interpolacji uległa poprawie co jest widoczne po kształcie wykresu jak i po spadku błędu średniokwadratowego w porównaniu do wcześniejszego wykresu z dziesięcioma węzłami.

## Głębia Challengera

### Równomierne rozmieszczenie punktów dla czterech węzłów

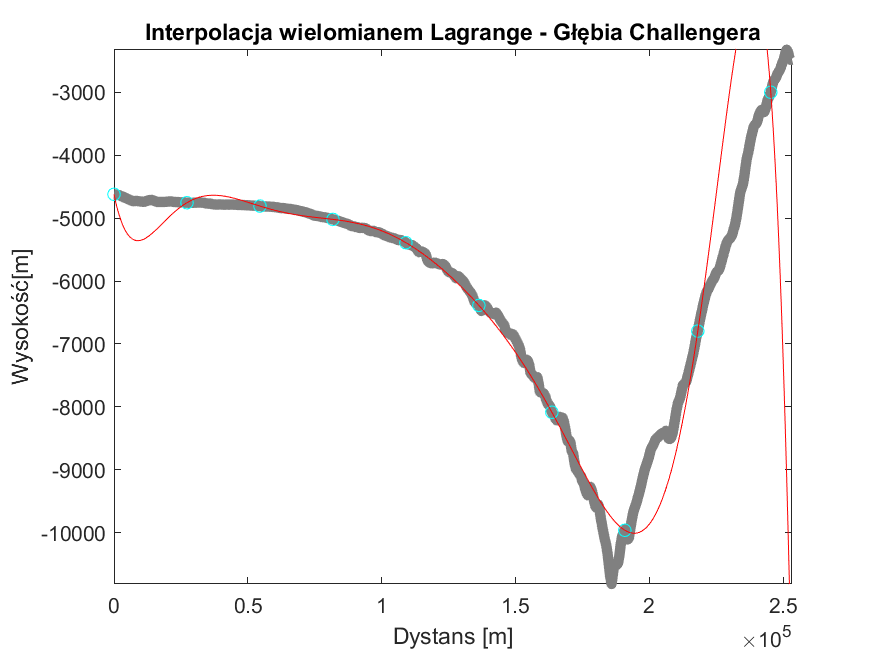




W tym przypadku pracujemy z terenem który charakteryzuje się z jednostajnym spadkiem i natychmiastowym wzniesieniem. Dla małej ilości węzłów, tak jak w poprzednich danych, interpolacja nie przynosi zadowalających wyników i nie do końca oddaje charakter terenu.

### Równomierne rozmieszczenie punktów dla dziesięciu węzłów

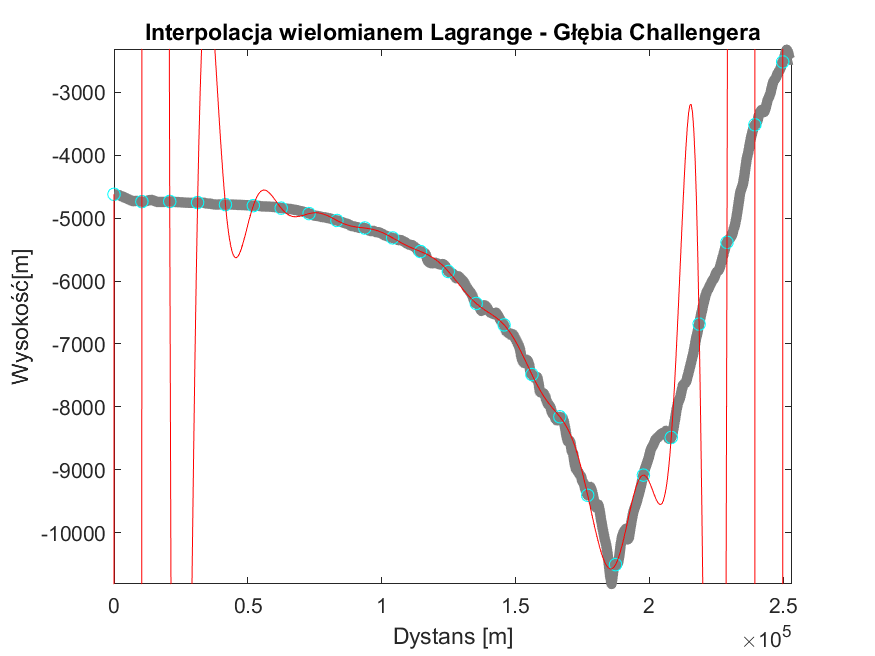




Dla większej ilości węzłów, przy terenie o charakterystyce bez chwilowych uskoków ( z jednostajnym spadkiem i wzrostem), możemy zauważyć że interpolacja przynosi satysfakcjonujące wyniki aczkolwiek efekt Rungego zaczyna być zauważalny na krańcach przedziału. Wzrost błędu średniokwadratowego wynika z oscylacji efektu Rungego.

### Równomierne rozmieszczenie punktów dla dwudziestu pięciu węzłów

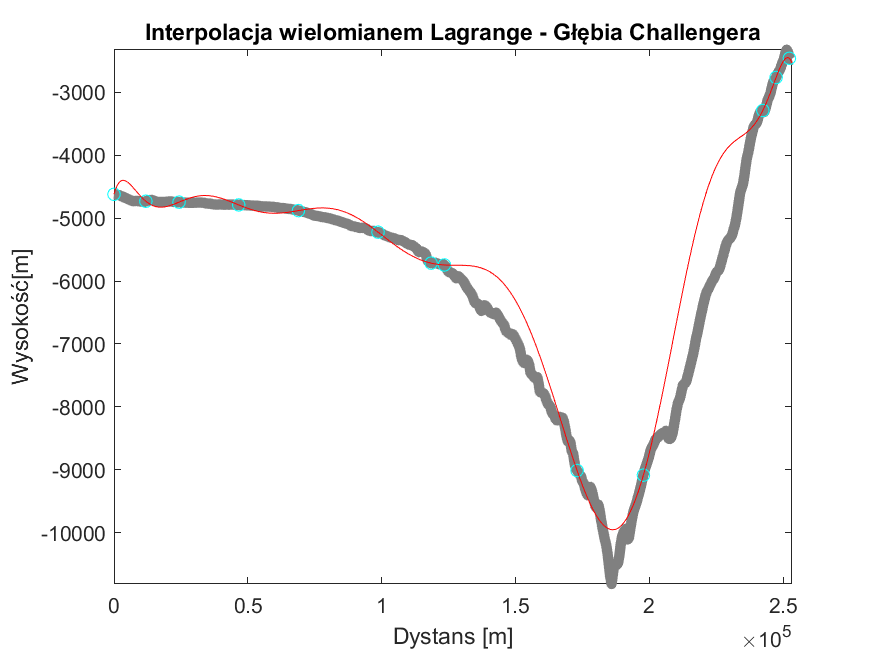




Przy zwiększonej liczbie węzłów interpolacyjnych, dokładność interpolacji w środku przedziału się zwiększyła, aczkolwiek na krańcach przedziału występuje efekt Rungego, w wyniku czego błąd średniokwadratowy przekracza 13 km.

### Nierównomierne rozmieszczenie punktów dla trzynastu węzłów



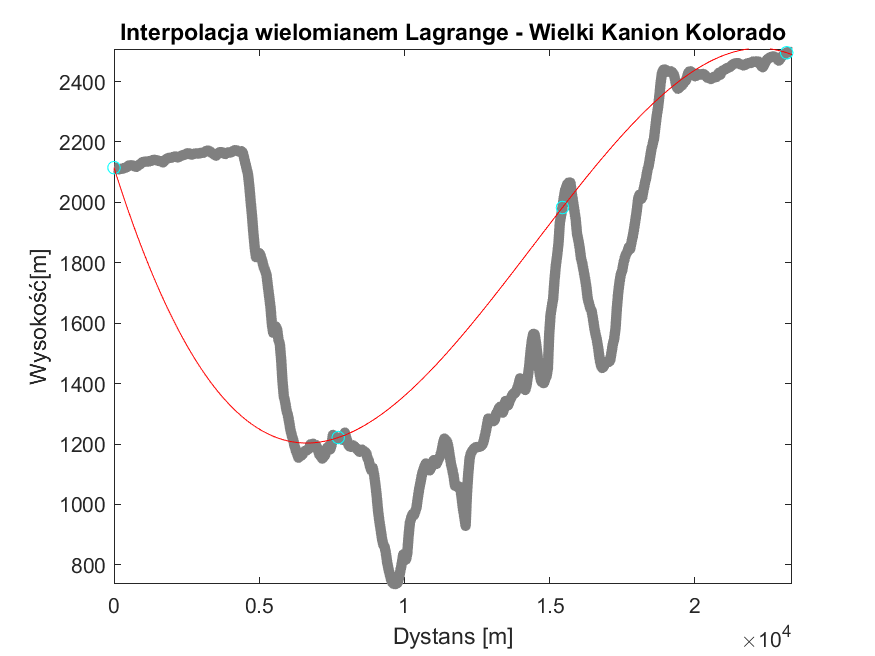


W przypadku gdy węzły interpolacyjne rozłożymy nierównomiernie i z większym skupieniem na krańcach przedziału nie zachodzi efekt Rungego i dokładność interpolacji ulega znaczącej poprawie. Z wykresu możemy zauważyć że efekt interpolacji odwzorowuje charakterystykę terenu. Warto zauważyć, pomimo że węzłów jest więcej niż w podpunkcie B.2, nie zachodzi efekt Rungego.

## Wielki Kanion Kolorado

### Równomierne rozmieszczenie punktów dla czterech węzłów

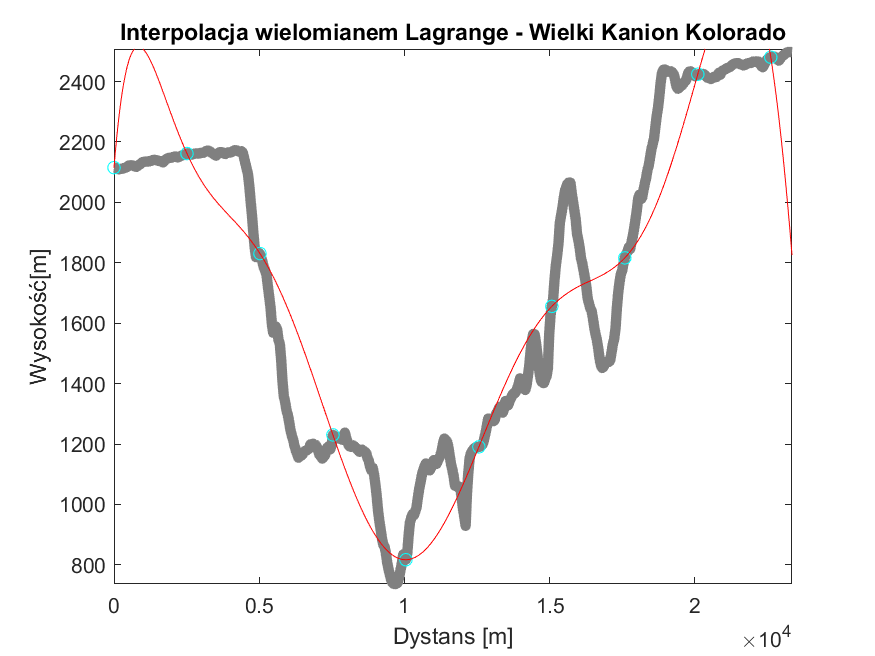




W tym przypadku pracujemy z terenem o zróżnicowanej charakterystyce w której występuje krótki fragment płaskiego terenu, doliny i nagłe uskoki wysokości. Ponownie dla małej ilości węzłów interpolacja nie przynosi satysfakcjonujących wyników ponieważ nie dostarczono wystarczającej ilości węzłów do zarysowania terenu. Można zauważyć ze same węzły nie wskazują na wystąpienie pojedynczych gór i spadków wysokości.

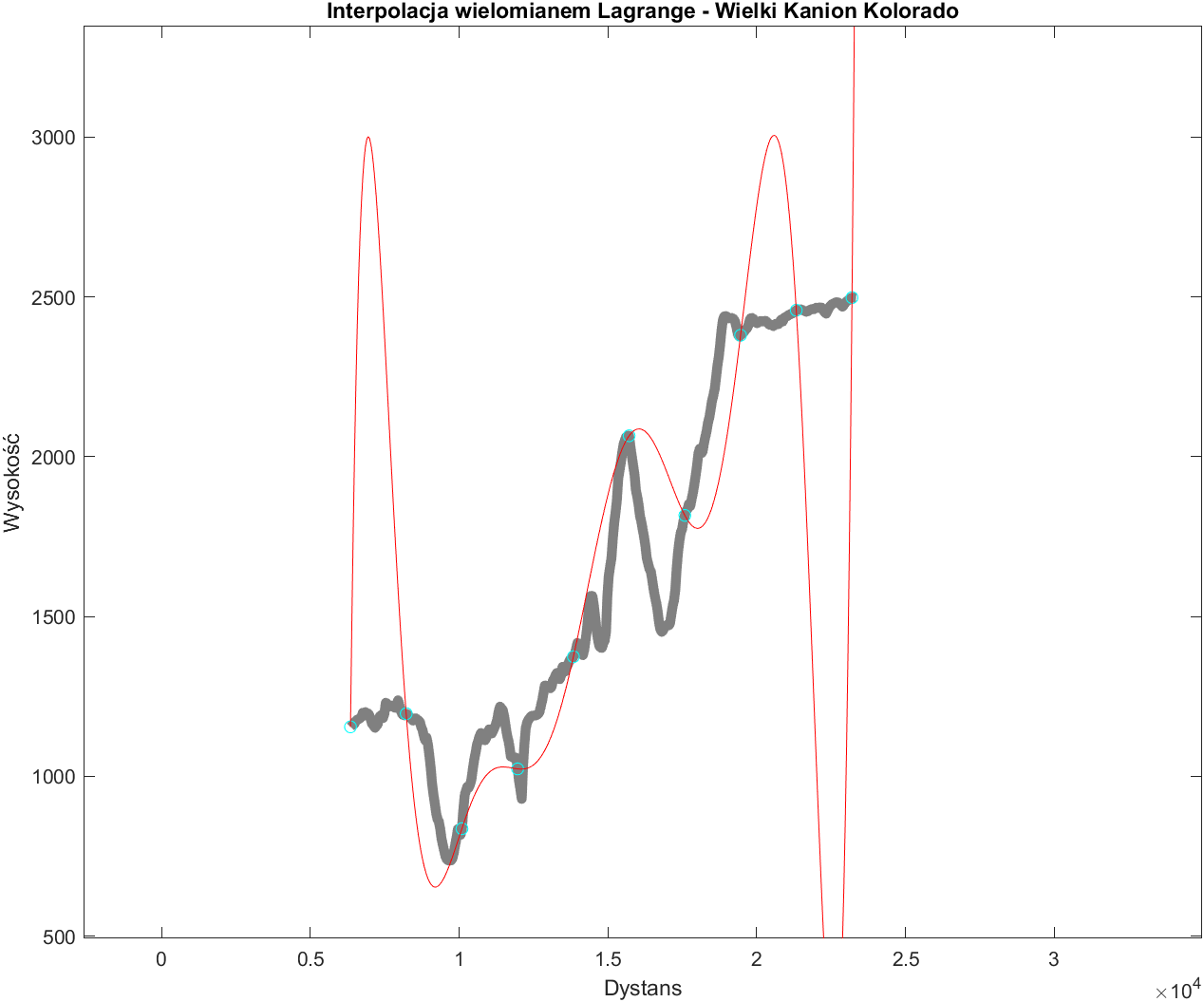
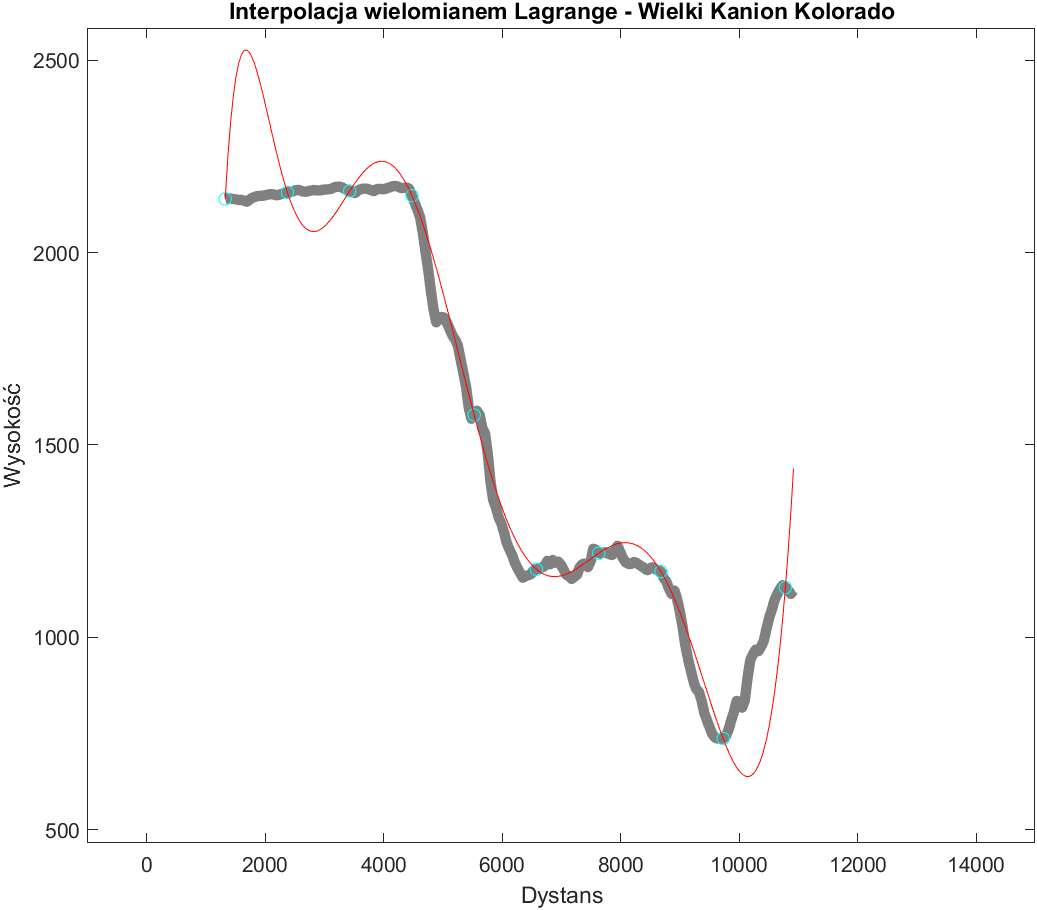
### Równomierne rozmieszczenie punktów dla dziesięciu węzłów





Z większym zarysem na charakterystykę terenu interpolacja z większą dokładnością odzwierciedla charakterystykę terenu aczkolwiek wciąż nie jest ona do końca zadowalająca. Można podzielić te dane na mniejsze fragmenty i dokonać interpolacji na nich jak na przykład:

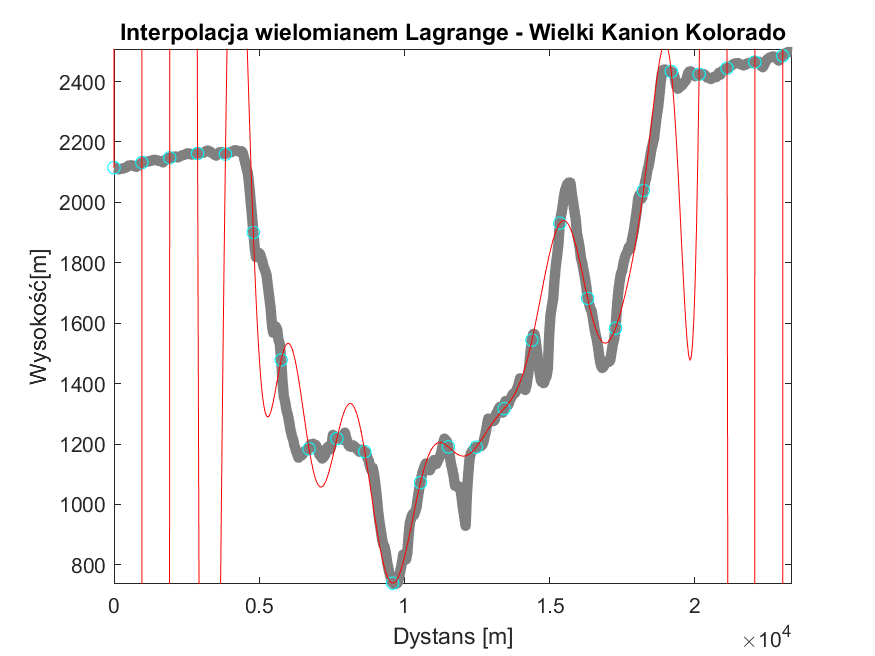
Dla pojedynczego fragmentu terenu funkcja interpolacyjna przyjmuje zadowalający kształt który w miarę dokładnie odwzorowuje kształt terenu. Na krańcach przedziału występują jednakże małe oscylacje.



Aczkolwiek dla mniej jednorodnego terenu w którym występują nagłe uskoki wysokości możemy zauważyć że jakość interpolacji znacznie się pogarsza.

### Równomierne rozmieszczenie punktów dla dwudziestu pięciu węzłów

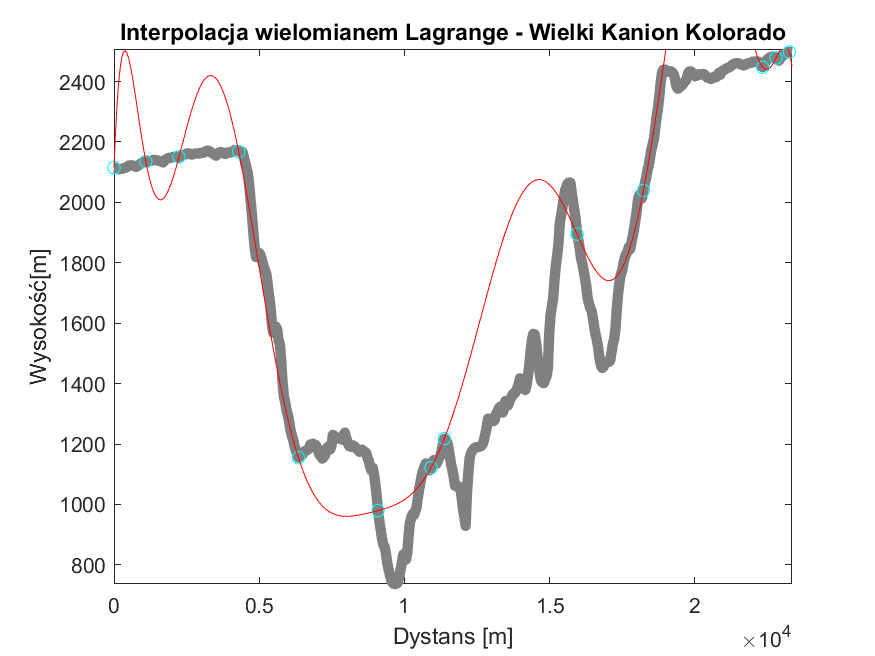




Przy większej liczbie wierzchołków znowu możemy zauważyć zwiększenie dokładności w środku przedziału i znaczące oscylacje wywołane przez efekt Rungego.

### Nierównomierne rozmieszczenie punktów dla trzynastu węzłów





Porównując rezultat przedstawiony na powyższym wykresie a z przypadkami w poprzednich zestawach danych możemy stwierdzić że kiedy nierównomierne rozmieszczenie węzłów interpolacyjnych może poprawić dokładność i zminimalizować efekt Rungego to dokładność tej interpolacji głównie zależy od tego jak są rozmieszczone te punkty. Ponadto Jak widać powyżej, pomimo nierównomiernego rozłożenia węzłów wciąż zachodzi efekt Rungego i funkcja nie oddaje charakterystyki terenu. Ciężko jest też przewidzieć zachowanie tej funkcji.

# **Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia**

Interpolacja splajnami trzeciego stopnia polega zasadniczo na znalezieniu współczynników do funkcji wielomianowych trzeciego stopnia należących do konkretnego podprzedziału, które są miedzy węzłami interpolacyjnymi. Współczynniki te są szukane tak aby:

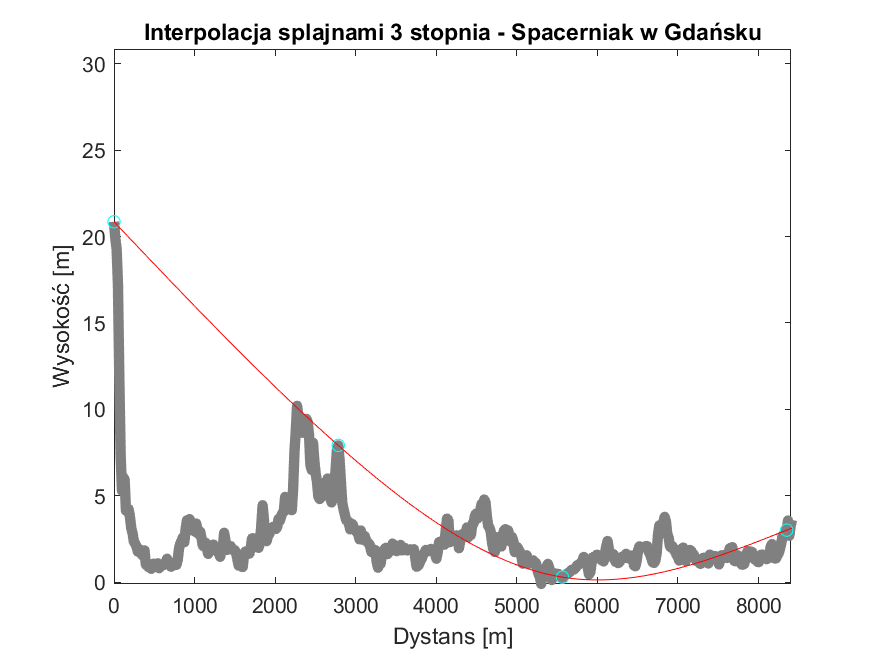
* Funkcja interpolująca w węzłach przyjmowała wartość tego węzła.
* Pierwsze pochodne na wewnętrznych granicach były te same w celu zapewnienia gładkości funkcji.
* Drugie pochodne na wewnętrznych granicach przedziału były te same w celu zapewnienia że funkcja nie będzie na przemian wklęsła i wypukła.
* Funkcja wielomianowa trzeciego stopnia dla i-tego przedziału

Na podstawie tych założeń formułowany jest układ równań który składa się z 4 \* n równań (gdzie n to liczba podprzedziałów czyli n+1 węzłów interpolacyjnych). Do rozwiązania układu równań wykorzystuję metodę faktoryzacji LU wbudowaną w środowisko Matlab [b = M\a]. Wtedy wówczas po wyliczeniu współczynników (które w moim projekcie znajdują się w wektorze), dokonujemy interpolacji która polega na znalezieniu podprzedziału, do którego należy punkt który interpolujemy. Następnie do funkcji należącego do konkretnego podprzedziału wstawiamy wcześniej wyliczone współczynniki oraz punkt interpolowany x. Możemy wstępnie zauważyć że ta metoda jest wymagająca czasowo ze względu na konieczność rozwiązania układu równań i obszerność ze względu na liczbę współczynników, rozmiarów macierzy na których pracujemy. Jednakże znaczącą zaletą tej metody jest brak podatności na efekt Rungego (ze względu na to że operujemy na wielomianach nie większych niż trzeciego stopnia).

## Spacerniak w Gdańsku

### Równomierne rozmieszczenie punktów dla czterech węzłów

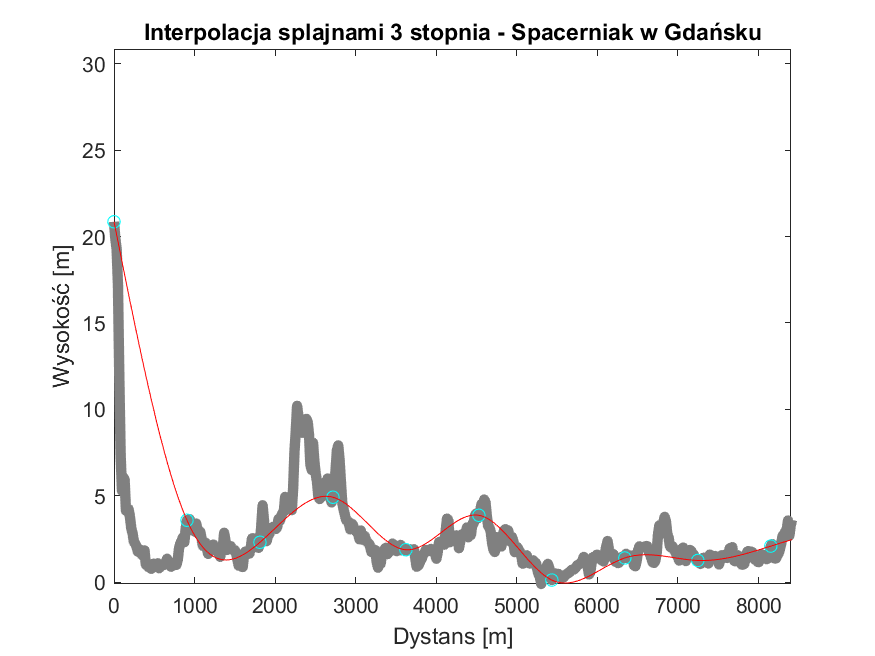




Wynik interpolacji dla małej ilości węzłów jest identyczny do interpolacji Lagrange. Jednakże wynika to z faktu że dostarczone węzły nie dostarczają wystarczających informacji o charakterystyce terenu.

### Równomierne rozmieszczenie punktów dla dziesięciu węzłów

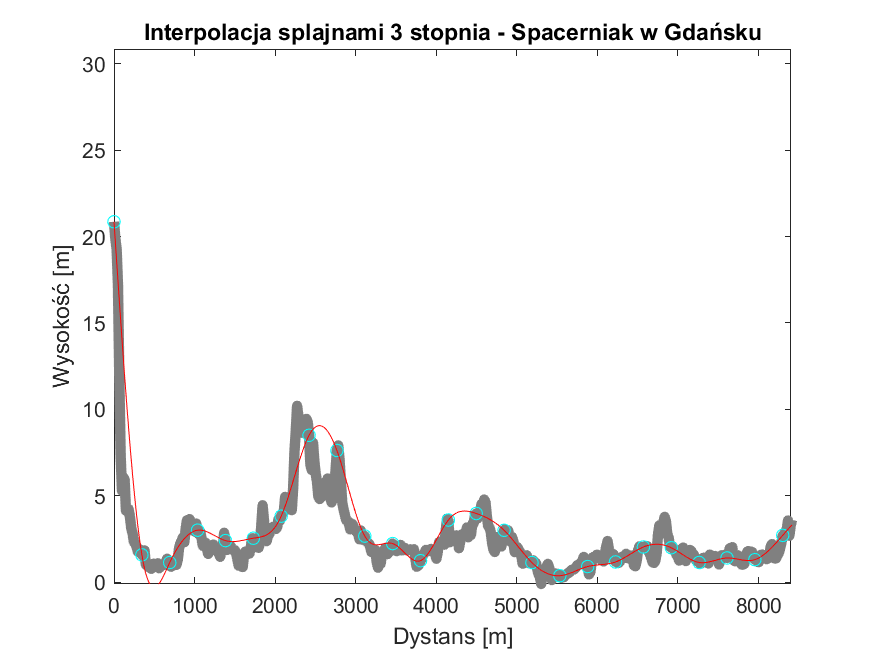




Dla większej liczby węzłów, które lepiej reprezentują teren, zachodzi poprawa dokładności interpolacji (co jest również widoczne w spadku błędu średniokwadratowego).

### Równomierne rozmieszczenie punktów dla dwudziestu pięciu węzłów

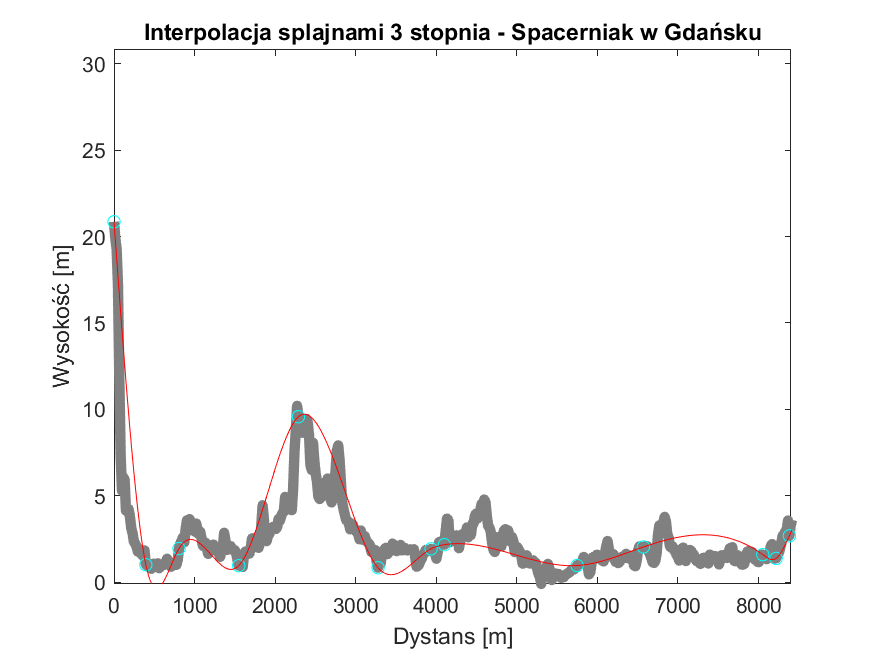




Dla większej liczby węzłów błąd średniokwadratowy jest mniejszy. Ponadto możemy stwierdzić że funkcja interpolacyjna wiernie odzwierciedla charakterystykę terenu.

### Nierównomierne rozmieszczenie punktów dla trzynastu węzłów

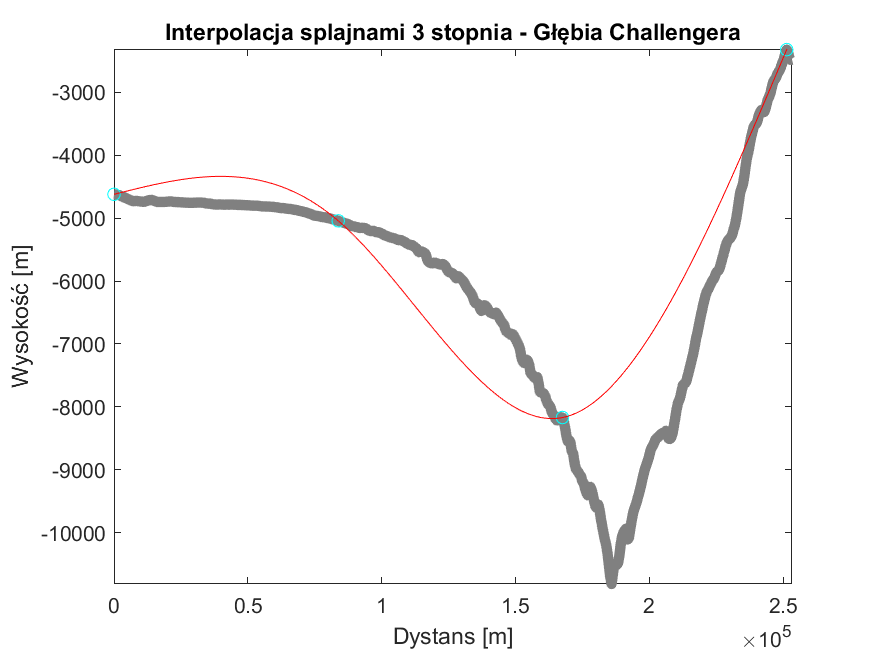




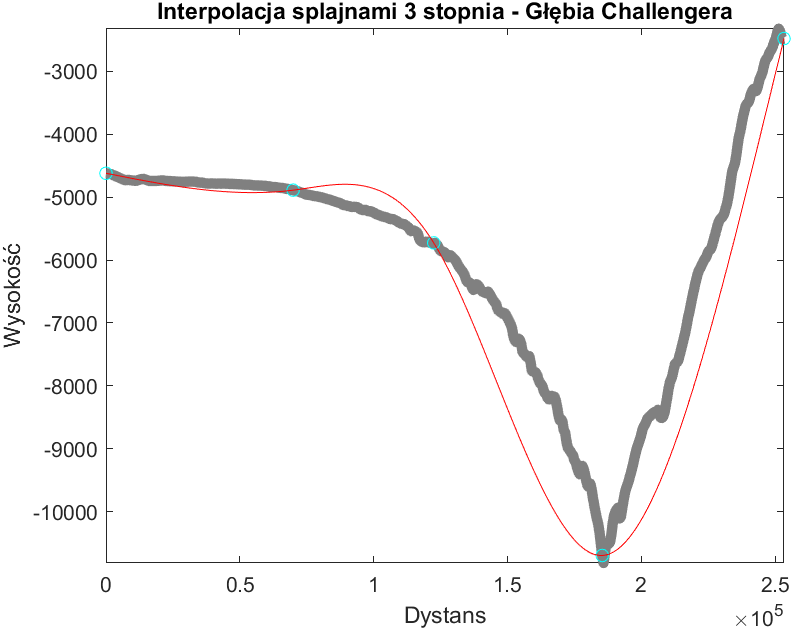
W tym przypadku przy nierównomiernym rozłożeniu węzłów wynik interpolacji nieznacznie się poprawił aczkolwiek wynika to z przypadku że węzły interpolacyjne zostały umieszczone w charakterystycznych punktach. Zasadniczo to interpolacja splajnami zyskuje raczej gdy węzłów jest więcej/ przekazują więcej informacji a więc nierównomierne rozłożenie węzłów w tym przypadku może przynieść nieprzewidywalne skutki.

## Głębia Challengera

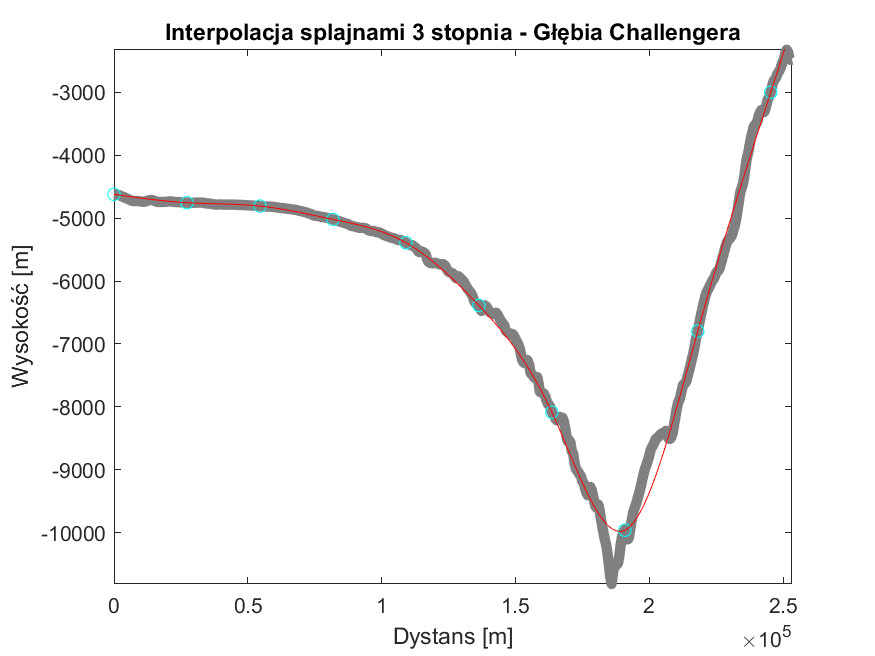
### Równomierne rozmieszczenie punktów dla czterech węzłów



W tym przypadku możemy zaobserwować rezultat identyczny do uzyskanego w metodzie Lagrange dla małej ilości węzłów. Interpolowana funkcja nie oddaje kształtu terenu ze względu na to że jej kształt zależy od tego jak te węzły zostaną umieszczone. Przykładowo, gdy ustawimy węzły interpolacji w charakterystycznych miejscach:



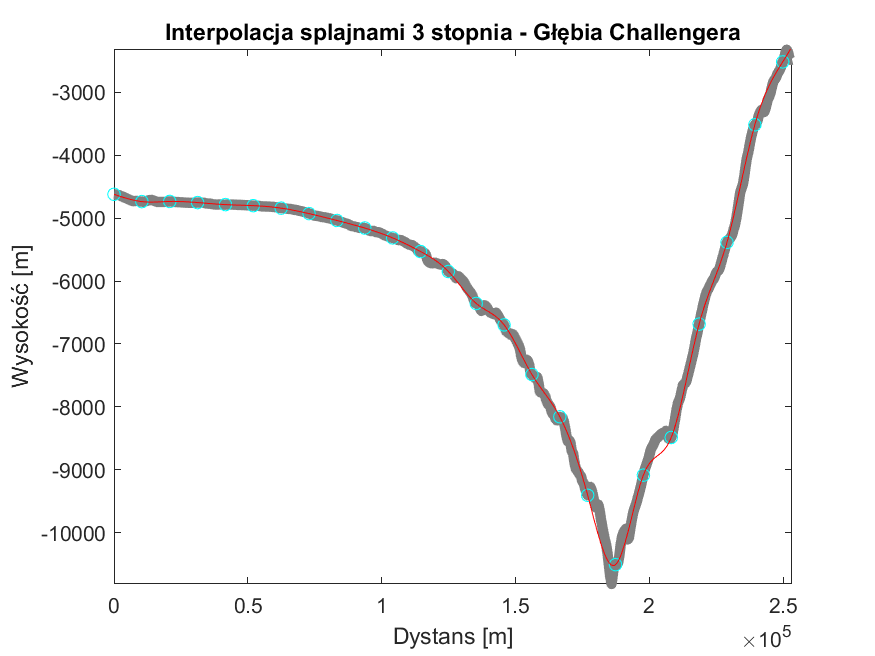
### Równomierne rozmieszczenie punktów dla dziesięciu węzłów



Dla dziesięciu węzłów interpolacyjnych zachodzi wzrost dokładności interpolacji i spadek błędu średniokwadratowego. Dzieje się tak ponieważ dostarczyliśmy więcej informacji o terernie w postaci węzłów.

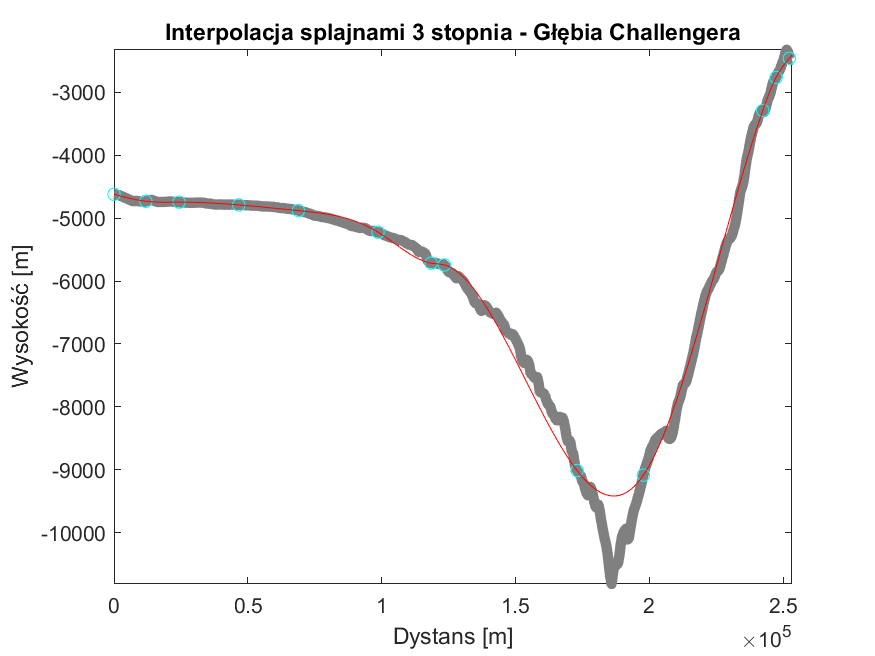
### Równomierne rozmieszczenie punktów dla dwudziestu pięciu węzłów





Identycznie jak w poprzednim wykresie możemy zaobserwować wzrost dokładności interpolacji i spadek błędu średniokwadratowego. Funkcja dokładnie odwzorowuje charakterystykę terenu.

### Nierównomierne rozmieszczenie punktów dla trzynastu węzłów

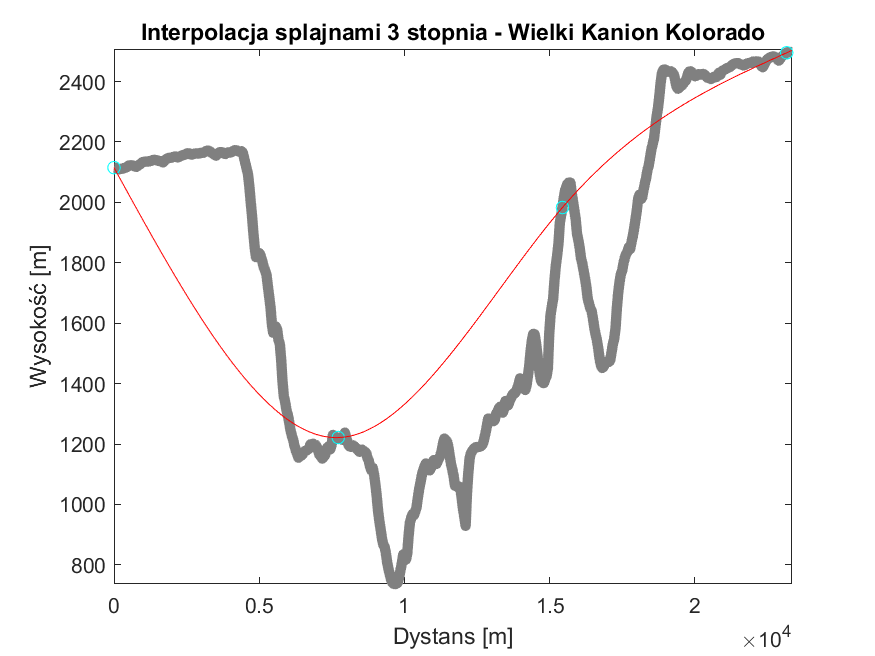


Ponownie możemy zauważyć że nierównomierne ułożenie punktów minimalnie pogorszyło interpolację co możemy zauważyć gdy porównamy powyższy wykres z wykresem dla dziesięciu równoodległych węzłów. Jakość interpolacji splajnami zyskuje na tym gdy podamy mu więcej różnorodnych informacji niż informacji podobnych i ułożonych blisko siebie.

## Wielki Kanion Kolorado

### Równomierne rozmieszczenie punktów dla czterech węzłów

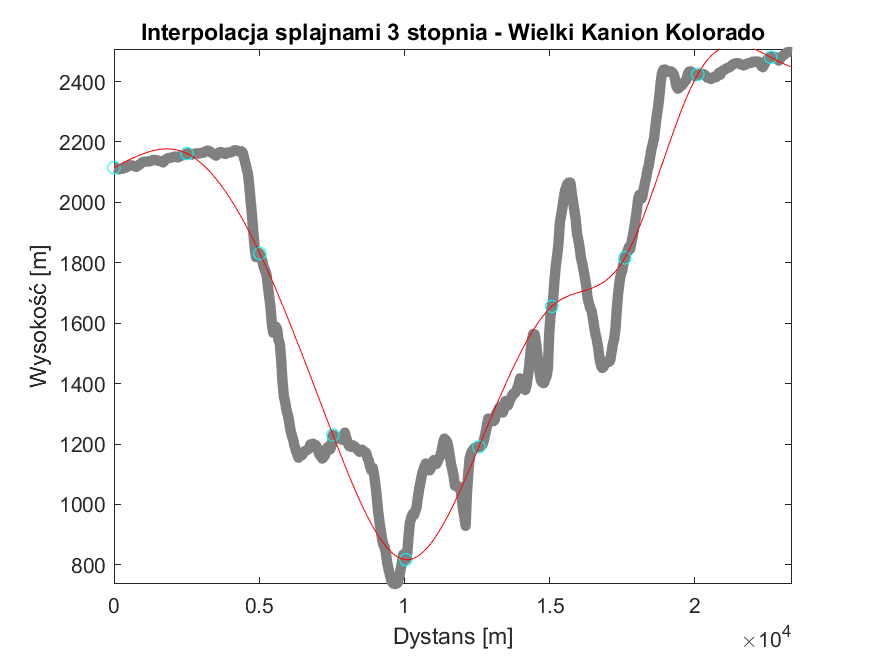




Dla terenu o różnorodnej charakterystyce, z nagłymi uskokami wysokości interpolacja z małą ilością węzłów nie przynosi pożądanych rezultatów. Dlatego aby zwiększyć dokładność interpolacji należy zwiększyć ilość węzłów interpolacyjnych

### Równomierne rozmieszczenie punktów dla dziesięciu węzłów

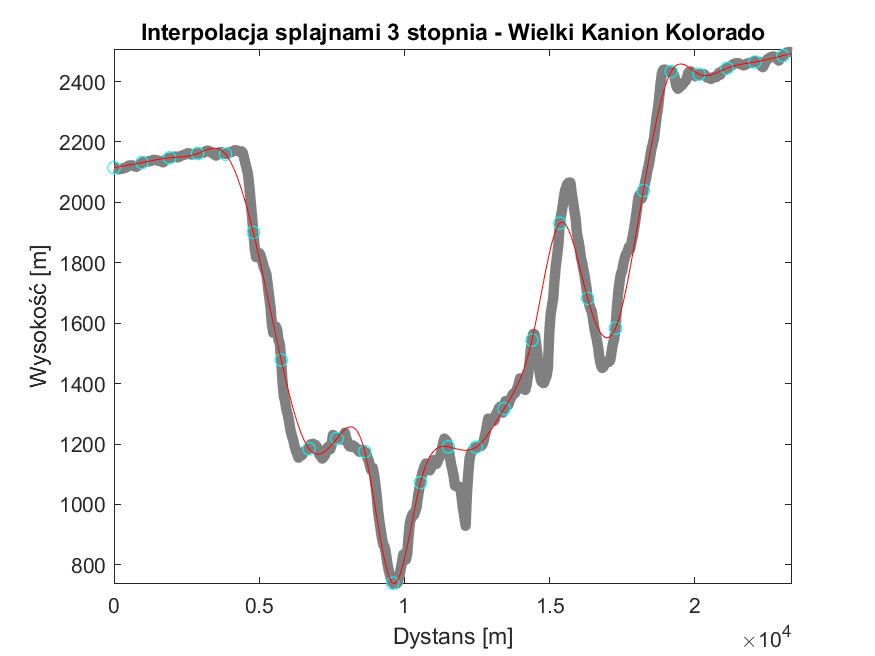




Przy większej ilości węzłów jakość interpolacji uległa poprawie aczkolwiek wciąż można zauważyć że funkcja interpolowana nie odzwierciedla istotnych cech terenu. Dzieje się tak ponieważ nie dostarczyliśmy wystarczająco informacji o tym terenie.

### Równomierne rozmieszczenie punktów dla dwudziestu pięciu węzłów

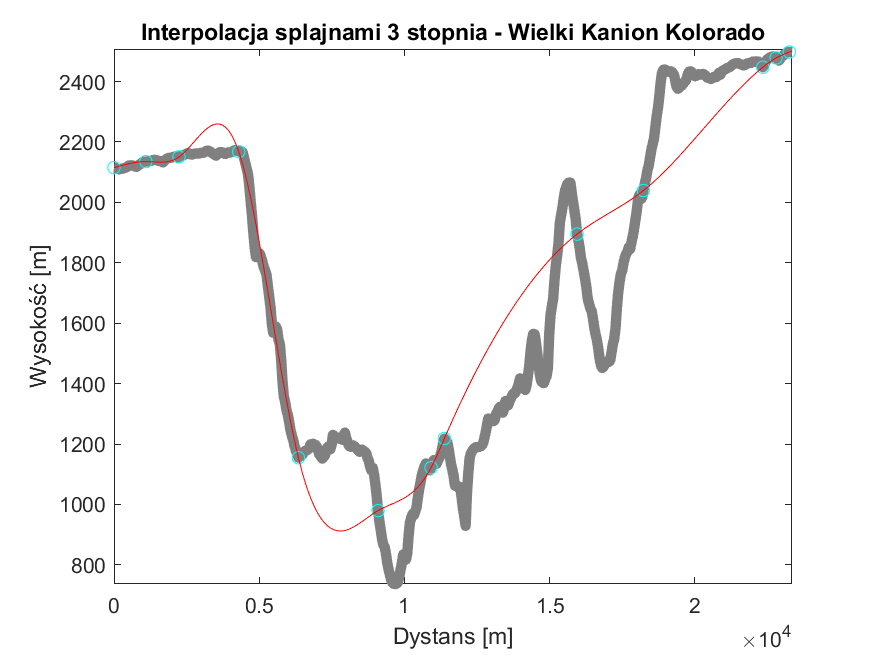




Gdy dostarczymy wystarczająco dużo węzłów interpolacyjnych do interpolacji splajnami, uzyskana funkcja interpolacyjna umożliwia nam do dokładnej predykcji charakterystyki terenu jak możemy zauważyć w powyższym wykresie.

### Nierównomierne rozmieszczenie punktów dla trzynastu węzłów

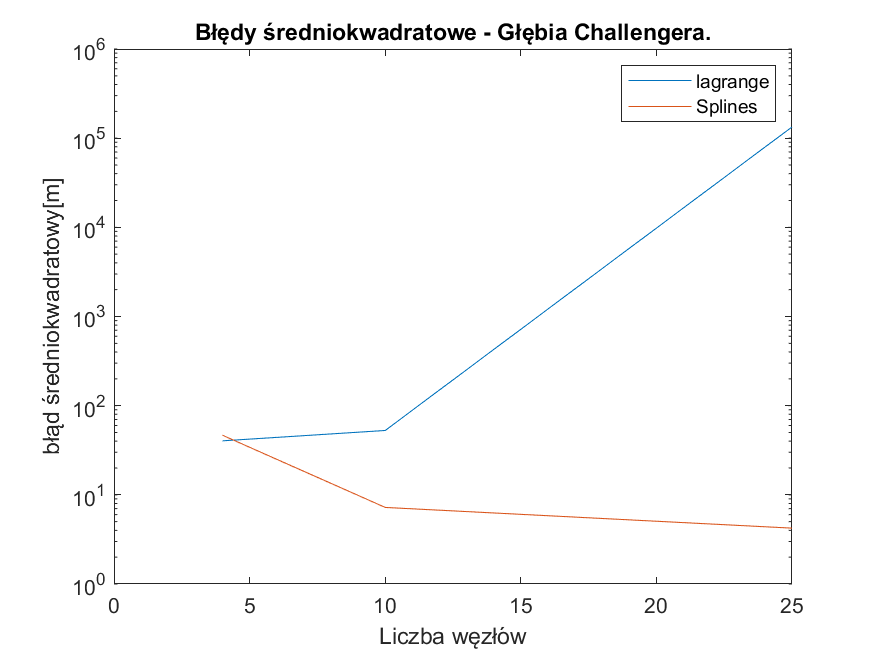
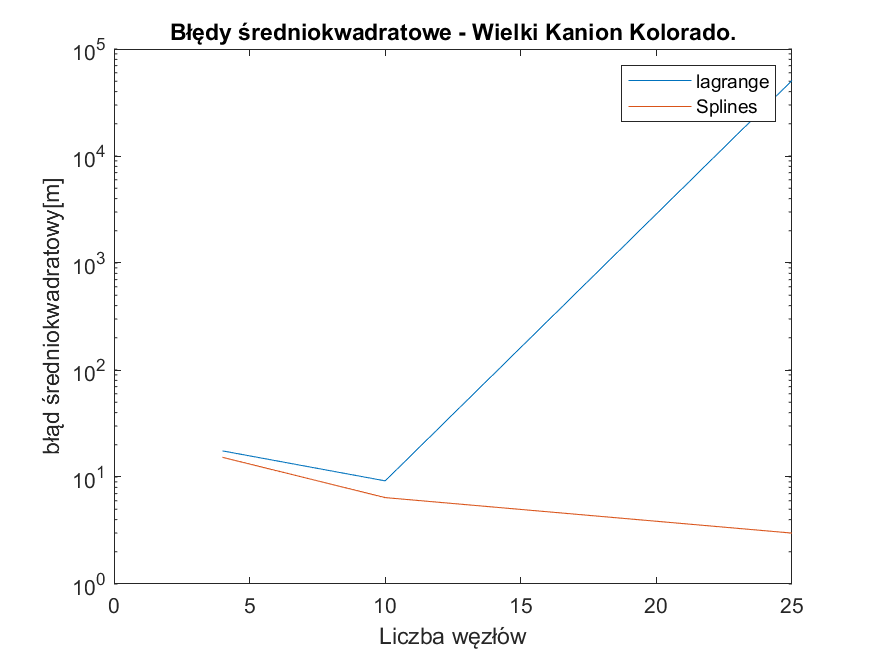
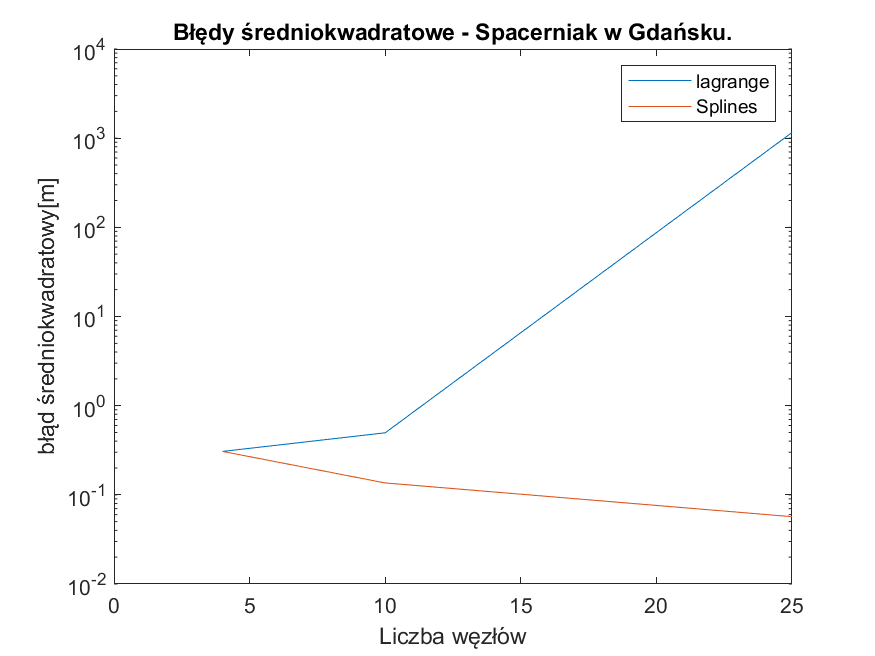




Z powodu nierównomiernego ułożenia punktów dokładność interpolacji uległa pogorszeniu co można zauważyć z wzrostu błędu średniokwadratowego pomimo zwiększenia liczby węzłów interpolacyjnych.

# **Zestawienie błędów średniokwadratowych**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Błędy średniokwadratowe | | | | | | | |
|
| **Ustawienie węzłów** | **Liczba węzłów** | Lagrange | | | Splajny | | |
| Głębia Challengera | Spacerniak w Gdańsku | Wielki Kanion Kolorado | Głębia Challengera | Spacerniak w Gdańsku | Wielki Kanion Kolorado |
| **równomiernie** | 4 | 40,3206655 | 0,30682498 | 17,5463479 | 46,5967904 | 0,30703418 | 15,2776132 |
| 10 | 52,6961079 | 0,49626901 | 9,20202305 | 7,2233378 | 0,13593737 | 6,41915034 |
| 25 | 133647,641 | 1157,03879 | 50768,8472 | 4,23148376 | 0,05688506 | 2,99086841 |
| **nierównomiernie** | 14 | 25,5348201 | 0,19038746 | 13,0914833 | 10,6317742 | 0,06976314 | 8,36445638 |



Wraz ze wzrostem liczy węzłów interpolacyjnych, w metodzie Interpolacji wielomianem Lagrange, w wyniku zajścia efektu Rungego błąd średniokwadratowy dla całego przedziału rośnie pod warunkiem że punkty są równoodległo ułożone. Ponadto możemy zauważyć że w przypadku interpolacji splajnami 3 stopnia błąd średniokwadratowy maleje i interpolacja jest bardziej dokładna.  
Natomiast w przypadku gdy węzły interpolacyjne są nierówno ułożone możemy zauważyć że wyniki w interpolacji Lagrange są lepsze ( dla Głębi Challengera i Spacerniaka w Gdańsku ) gdzie w interpolacji splajnami wyniki są gorsze ( dla Głębi Challengera i Wielkiego Kanionu Kolorado ). Należy mieć na uwadze jednak że ta zależność jest przypadkowa i zależy od ułożenia węzłów interpolacyjnych. Ponadto ciężko jest przewidzieć zachowanie interpolacji zmieniając położenie węzłów.

# **Podsumowanie**

Na podstawie dokonanych interpolacji i porównań możemy wyciągnąć wnioski:

1. Kiedy zaletą interpolacji metodą Lagrange jest jego łatwość w implementacji, jest on podatny na efekt Rungego czyli oscylacji na krańcach przedziału. Zachodzą one w przypadku gdy węzły interpolacyjne są równoodlegle ułożone, aczkolwiek nierównomierne ułożenie punktów nie zawsze naprawia ten problem. Wraz ze wzrostem węzłów interpolacyjnych, dokładność interpolacji wzrasta na środku przedziału, gdzie na krańcach dochodzi do większych oscylacji.
2. W przeciwieństwie do metody Lagrange, metoda interpolacji splajnami 3 stopnia nie jest podatna na efekt Rungego. Ponadto wraz ze wzrostem liczby węzłów interpolacyjnych dokładność tej funkcji wzrasta. Pomimo większej złożoności czasowej i pamięciowej, metoda interpolacji Splajnami przynosi lepsze rezultaty niż interpolacja wielomianem Lagrange.
3. W sprawozdaniu uwzględniono również wpływ charakterystyki terenu na dokładność funkcji interpolacyjnej. Można zauważyć że dla terenów które charakteryzują się jednostajnym spadkiem, czy też wzrostem interpolacja w miarę dokładnie przewiduje wartości, natomiast gdy teren jest nierówny, zawiera nagłe uskoki wysokości, przybliżenie dla tej samej ilości punktów jest mniej dokładne.
4. Ostatnim zbadanym aspektem był wpływ rozmieszczenia węzłów interpolacyjnych na funkcję interpolacyjną. W przypadku interpolacji Lagrange mogliśmy zaobserwować poprawę dokładności i zminimalizowanie efektu Rungego, jednakże nie zawsze to zachodziło. Natomiast dla interpolacji Splajnami zaobserwowaliśmy pogorszenie dokładności, aczkolwiek gdy węzły przypadkiem odpowiednio się ustawią dokładność może się poprawić.

Podsumowując, metoda funkcji sklejanych trzeciego stopnia, pomimo gorszej złożoności czasowej i pamięciowej, jest metodą lepszą, dokładniejszą i przede wszystkim niepodatną na efekt Rungego. Metoda Lagrange ze względu na generowany efekt Rungego powoduje poważne błędy w interpolacji.